Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа «Компьютерные технологии и информационные системы»

**Пояснительная записка**

**к курсовой работе**

**по теме «Исследование методов решения дифференциальных уравнений»**

по дисциплине «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил:  студент гр. з5130902/20001 | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Рязанцев Д.Л. |
|  | <*подпись*> |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Руководитель:  ст. преподаватель | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Кузнецова Л. В. |
|  | <*подпись*> |  |

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2024 г.

Санкт-Петербург

2024

**Реферат**

Пояснительная записка к курсовой работе 23 с., 5 рис., 5 источников, 4 прил.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ, MATLAB, ПОГРЕШНОСТЬ, ГРАФИК, МЕТОДЫ, АДАМС-БАШФОРТ, РУНГЕ-КУТ

Объектом исследования является решение ОДУ различными методами с использованием программы Matlab.

Цель работы – решить ОДУ различными методами с использованием программы

Matlab.

Для достижения цели в процессе работы решались следующие задачи:

Решение ОДУ следующими методами:

1. Аналитически;
2. Методом из семейства методов Адамса-Башфорта 1 порядка;

При выполнении данного метода, также необходимо для заданного в соответствии

ОДУ:

* 1. Привести ОДУ к виду
  2. Построить разностную схему для решения ОДУ заданным методом
  3. Разработать алгоритм для решения ОДУ в соответствии с построенной разностной схемой и написать соответствующую программу в программном продукте MatLAB. Шаг сетки разностной схемы *h* установить таким образом, чтобы разностная схема сходилась (т.е. чтобы метод решения ОДУ был устойчив). В случае невозможности отыскания такого шага *h* (т.е. при неустойчивости заданного метода для конкретного ОДУ) необходимо подробно разъяснить причину и предложить вариант изменения условий таким образом, чтобы заданный метод для ОДУ стал устойчивым.

1. Методом Рунге-Кутта 4 порядка.

В результате исследования произвести построение графиков решений, сравнение

полученных результаты и исследование зависимости погрешности от выбора шага

**Оглавление**:

Введение 4

1. Постановка задачи 5

2. Приведение ДУ к требуемому виду 6

3. Решение ДУ аналитически 7

4. Решение ДУ численными методами 9

4.1 Метод Адамса-Башфорта 1-го порядка 9

4.2 Метод Рунге-Кутты 11

5. Сравнение полученных решений 15

5.1 Расчет погрешностей 15

Заключение 16

Список литературы 17

Приложение 1. 18

Приложение 2. 19

Приложение 3. 20

Приложение 4. 21

# Введение

В наши дни люди часто сталкиваются с решением дифференциальных уравнений, например, при расчетах в электротехнике или радиотехнике. Обычно, это линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ). Одним из частных случаев линейных дифференциальных уравнений являются ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Все численные методы для решения линейных дифференциальных уравнений связаны с переходом от дифференциальной системы к разностной схеме и вычислением приближенных решений в форме сеточных функций.

Метод Адамса-Башфорта 2-го порядка был предложен английским астрономом математиком Джоном Курием Адамсом в 1855 году. Метод является экстраполяционным, и, в отличие от методы Рунге-Кутты использует для вычисления очередного значения искомого решения не одно, а несколько значений, которые уже вычислены в предыдущих точках.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка относится к группе явных методов. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой. Наиболее часто используется и реализован в различных математических пакетах классический метод Рунге-Кутты, имеющий четвертый порядок точности. Решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты является одним из самых распространённых численных методов решений в технике.

# Постановка задачи

Необходимо решить ОДУ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (1.1) |
|  | | | |

различными методами:

1. аналитически (или с использованием стандартной процедуры MATLAB dsolve);
2. методом из семейства методов Адамса в соответствии с вариантом;
3. методом Рунге-Кутта (стандартная процедура MATLAB - ode45).

Построить графики решений. Сравнить полученные результаты.

Исследовать зависимость погрешности от выбора шага.

Вариант № 1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2) |

Из семейства методов Адамса требуется использовать метод Адамса-Башфорта 2-го порядка.

# Приведение ДУ к требуемому виду

Для применения численных методов решения ОДУ, необходимо от ЛДУ третьего порядка (1.1) перейти к системе из ЛДУ первого порядка.

Введем новые переменные, чтобы представить исходное уравнение в виде системы уравнений.

Пусть

Тогда мы можем представить исходное ЛДУ третьего порядка (1.1) в виде системы из трех уравнений первого порядка:

Получаем дифференциальное уравнение вида:

где *А* – матрица состояния, а *B –* матрица управления.

# Решение ДУ аналитически

Для решения ОДУ (1.1) реализован скрипт, приведенный в Приложение 1. При реализации были использованы следующие методы из стандартной библиотеки *MatLAB* : *dsolve(), simplify().*

Получаем следующий результат:



Полученному решению соответствует график (см. рис 3.1)

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описаниеРисунок 3.1 – Решение заданного ОДУ аналитически с использованием функции *dsolve*

# Решение ДУ численными методами

## Метод Адамса-Башфорта 1-го порядка

Из литературы известна расчетная формула для группы методов Адамса-Башфорта:

Следовательно, для метода 1-го порядка расчетная формула имеет вид:

где:

* – значение искомой функции в следующей точке сетки,
* – значене искомой функции в текущей точке,
* - шаг сетки,
* – значение правой части ОДУ в текущей точке.

Выбор шага () для метода Адамса-Башфорта 1 порядка имеет важное значение, так как он влияет на точность и устойчивость решения. Слишком большой шаг приведет к уменьшению точности решения, а слишком маленький – к увеличению времени вычислений.

Алгоритм применения метода Адамса-Башфорта 1 порядка к уравнению:

1. Определение параметров: начального времени и , начальных условий и шага сетки .
2. Создание векторов для хранений значений времени и функции.
3. Определение функции f, которая преобразует ОДУ к виду
4. Применение метода для вычисления значений функции на каждом шаге сетки.
5. Вывод результатов в виде графика.

Данному решению соответствует график на рисунке 4.1. Код программы представлен в Приложение 2.

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описание

Рисунок 4.1 – Решение заданного ОДУ методом Адамса-Башфорта 1-го порядка

## Метод Рунге-Кутты

Разностная схема метода Рунге-Кутты 4-го порядка описывается формулами:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.3) |

Решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка реализовано программой, представленной в Приложение 3.

Получено численное решение (см. таб. 1)

Таблица 1 - Вывод программы при решении ОДУ методом Рунге-Кутты

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6.0285e-05 | 3.0428e-14 | 1.5142e-09 | 5.0231e-05 |
| 0.00012057 | 2.4341e-13 | 6.0561e-09 | 0.00010045 |
| 0.0011454 | 2.0845e-10 | 5.4574e-07 | 0.0009521 |
| 0.0014468 | 4.1999e-10 | 8.7037e-07 | 0.0012018 |
| 0.022547 | 1.5531e-06 | 0.00020493 | 0.01788 |
| 0.030082 | 3.6582e-06 | 0.00036083 | 0.023468 |
| 0.08227 | 7.0819e-05 | 0.0025057 | 0.057424 |
| 0.1046 | 0.00014209 | 0.0039272 | 0.069701 |
| 0.12692 | 0.00024806 | 0.0056095 | 0.080808 |
| 0.3187 | 0.0032638 | 0.027749 | 0.14135 |
| 0.35429 | 0.004342 | 0.032897 | 0.14777 |
| 0.65216 | 0.021223 | 0.081667 | 0.17331 |
| 0.71354 | 0.026564 | 0.092356 | 0.17499 |
| 0.77491 | 0.032562 | 0.10313 | 0.176 |
| Продолжение таблицы 1 | | | |
| 1.1267 | 0.079758 | 0.16516 | 0.17527 |
| 2.0752 | 0.31314 | 0.32442 | 0.15951 |
| 2.2218 | 0.3624 | 0.3476 | 0.15673 |
| 3.5538 | 0.95677 | 0.53884 | 0.13016 |
| 3.7981 | 1.0922 | 0.56999 | 0.1251 |
| 4.0423 | 1.2351 | 0.59993 | 0.11986 |
| 4.2866 | 1.3852 | 0.62859 | 0.11463 |
| 4.9136 | 1.8009 | 0.69633 | 0.10133 |
| 5.0703 | 1.9113 | 0.71194 | 0.097991 |
| 5.227 | 2.0241 | 0.72704 | 0.094638 |
| 5.3838 | 2.1392 | 0.74161 | 0.091264 |
| 6.3395 | 2.8865 | 0.81904 | 0.070768 |
| 6.5703 | 3.0774 | 0.83479 | 0.065907 |
| 6.8011 | 3.2718 | 0.84943 | 0.061033 |
| 7.0319 | 3.4694 | 0.86296 | 0.056105 |
| 8.1754 | 4.4877 | 0.91358 | 0.032586 |
| 8.3276 | 4.6271 | 0.9183 | 0.029539 |
| 9.6797 | 5.8877 | 0.94048 | 0.0036512 |
| 9.897 | 6.0922 | 0.94085 | -0.00030497 |
| 10.114 | 6.2966 | 0.94036 | -0.0041873 |
| 11.164 | 7.2778 | 0.92655 | -0.021853 |
| 11.9 | 7.9529 | 0.90624 | -0.033151 |
| 12.101 | 8.1342 | 0.89929 | -0.036074 |
| 12.302 | 8.3141 | 0.89176 | -0.038919 |
| 13.628 | 9.4572 | 0.82861 | -0.055742 |
| 14.162 | 9.8915 | 0.79726 | -0.061564 |
| 14.34 | 10.032 | 0.78614 | -0.063366 |
| 15.104 | 10.614 | 0.7349 | -0.070406 |
| 15.309 | 10.763 | 0.72034 | -0.072112 |
| 16.594 | 11.626 | 0.62176 | -0.080733 |
| Продолжение таблицы 1 | | | |
| 17.886 | 12.361 | 0.51358 | -0.08622 |
| 18.051 | 12.444 | 0.49928 | -0.086651 |
| 19.11 | 12.924 | 0.40644 | -0.088418 |
| 19.297 | 12.999 | 0.38985 | -0.088535 |
| 20.801 | 13.485 | 0.25725 | -0.08726 |
| 22.068 | 13.742 | 0.14884 | -0.083494 |
| 22.229 | 13.765 | 0.1354 | -0.082878 |
| 23.281 | 13.862 | 0.050699 | -0.077963 |
| 24.331 | 13.873 | -0.02808 | -0.071855 |
| 25.726 | 13.767 | -0.12192 | -0.062386 |
| 26.698 | 13.62 | -0.179 | -0.055014 |
| 32.934 | 11.764 | -0.36356 | -0.0047511 |
| 33.614 | 11.516 | -0.36512 | 0.00012849 |
| 37.895 | 10.036 | -0.30896 | 0.023978 |
| 38.104 | 9.9727 | -0.30388 | 0.024778 |
| 38.312 | 9.91 | -0.29864 | 0.025551 |
| 39.279 | 9.6334 | -0.2723 | 0.028756 |
| 39.46 | 9.5846 | -0.26705 | 0.029278 |
| 39.641 | 9.5368 | -0.26171 | 0.029755 |
| 44.188 | 8.6821 | -0.11097 | 0.034081 |
| 44.362 | 8.6634 | -0.10507 | 0.033962 |
| 44.543 | 8.6449 | -0.09892 | 0.033836 |
| 46.094 | 8.5316 | -0.047769 | 0.031931 |
| 47.655 | 8.4947 | -0.00021155 | 0.02883 |
| 47.828 | 8.4951 | 0.004744 | 0.028434 |
| 48.001 | 8.4964 | 0.009633 | 0.02801 |
| 48.174 | 8.4985 | 0.014449 | 0.027578 |
| 50.036 | 8.5703 | 0.061189 | 0.022491 |
| 50.243 | 8.5835 | 0.065778 | 0.021861 |
| 50.45 | 8.5975 | 0.070237 | 0.021229 |
| 51.606 | 8.6921 | 0.092718 | 0.01764 |
| Продолжение таблицы 1 | | | |
| 51.783 | 8.7089 | 0.095797 | 0.017065 |
| 52.291 | 8.7596 | 0.10405 | 0.015438 |
| 52.456 | 8.7771 | 0.10656 | 0.014901 |
| 52.622 | 8.7949 | 0.10898 | 0.014364 |
| 54.743 | 9.0532 | 0.13221 | 0.0075671 |

Классический метод Рунге-Кутты имеет четвёртый порядок точности. Из полученных результатов по решению можно сделать вывод о том, что шаг в основном так же не сильно зависит от точности вычислений.

Данному решению соответствует график ), представленный на рисунке 4.2, код программы представлен в Приложение 3.

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описание

Рисунок 4.1 – Решение заданного ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка

# Сравнение полученных решений

## Расчет погрешностей

Для методов Рунге-Кутты и Адама-Башфорта с использованием программы для расчета погрешностей (см. Приложение 4) были построены графики отличия от аналитического решения. Были сделаны следующие выводы:

На рисунке 5.1 представлены графики погрешностей методов Рунге-Кутты 4 порядка, метода Адамса-Башфорта 1 порядка с = 0.4, метода Адамса-Башфорта 1 порядка с = 0.2 и метода Адамса-Башфорта с . Как следует из графиков, метод Рунге-Кутты имеет наименьшую погрешность на всем выбранном интервале. Уменьшение шага в методе Адамса-Башфорта 1 порядка приводит к уменьшению погрешности.

A graph with different colored lines

Description automatically generated

Рисунок 5.1 – Динамика погрешностей численных методов

# Заключение

В ходе данной работы достигнуты следующие результаты:

* Закреплены знания по решению ЛДУ численными методами: методом Адамса-Башфорта 1-го порядка, стандартной процедурой ode45 и при помощи встроенной в MATLAB функции аналитического решения *dsolve*;
* реализована корректно работающая программа, которая строит графики решений (3мя способами) и необходимых погрешностей;
* Проведено исследование метода Адамса-Башфорта 1-го порядка с точки зрения влияния выбора шага на погрешность решения.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка показал себя лучше по сравнению с методом Адамса-Башфорта 1-го порядка, а у метода Адамса- Башфорта 1-го порядка сильное соотношения с размером шага, где при большом значении *h* график начинает сильно расходиться от аналитического.

Подробное рассмотрение зависимости погрешности от шага в методах Ругне-Кутта 4 порядка и Адамса-Башфорта 1 порядка показало, что увеличение шага увеличивает погрешность и при достаточно большом значении уменьшает устойчивость алгоритма.

В заключение, проведенное исследование показало, что метод Рунге-Кутта 4-го порядка является наиболее точным среди рассмотренных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако следует учитывать, что выбор метода зависит от специфики решаемой задачи, требуемой точности и доступных вычислительных ресурсов. В некоторых случаях может быть целесообразным использовать комбинацию аналитических и численных методов для достижения наилучших результатов.

# Список литературы

1. Кирсяев А.Н., Куприянов В.Е. Вычислительная математика: конспект лекций. – СПб.: СПбГПУ, 2011. ­– 173 с.
2. Устинов С.М., Зимницкий В.А. Вычислительная математика. – СПб.: БХВ, 2009.- 336 с.
3. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Борзенков А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в MATLAB: Конспект лекций для студентов всех специальностей БГУИР дневной формы обучения. – Минск: БГУИР, 2010.

# Приложение 1.

Код программы для решения ОДУ аналитически:



# Приложение 2.

Код программы для решения ОДУ методом Адамса-Башфорта 1-го порядка:



# Приложение 3.

Код программы для решения ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка:



# Приложение 4.

Код программы для отслеживания разницы между численными методами и аналитическим решением (с шагом *h*=1, и *2h*):

